# Une introduction à la topologie algébrique
# Une collection d'exercices

Rémi Molinier

12 mai 2022

## 1 Des constructions classiques

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$. On note $X/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalences et $\pi\colon X \to X/\mathcal{R}$ la projection canonique qui envoie $x \in X$ sur sa classe d'équivalence dans $X/\mathcal{R}$. La **topologie quotient** sur $X/\mathcal{R}$ est donnée par les ouverts

$$\{O \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}$$

i.e. une partie de $X/\mathcal{R}$ est ouverte si sa préimage par $\pi$ est ouverte dans $X$. Sauf indication du contraire, les espaces quotients seront toujours considérés munis de la topologie quotient.

**Exercice 1.1.**
Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique quelconque, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$ et $\pi\colon X \to X/\mathcal{R}$ l'application quotient. On muni $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient qu'on notera $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$. Dans les questions suivantes, pour chaque réponse négative, inclusion/implication fausse, on attend (au moins) un contre exemple.

1. Est-ce que $\pi$ est continue ? ouverte ? fermée ?
2. Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur $X/\mathcal{R}$ rendant $\pi\colon (X, \mathcal{T}) \to (X/\mathcal{R}, \mathcal{T}')$ continue. Comparer $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$.
3. Soit $(Z, \mathcal{T}_Z)$ et $f\colon X \to Z$ une application continue. On suppose pour tout $x, y \in X$ que si $x\mathcal{R}y$ alors $f(x) = f(y)$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\overline{f}\colon X/\mathcal{R} \to Z$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Z \\ & X/\mathcal{R} \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

4. Soit $(Z, \mathcal{T}_Z)$ un espace topologique et $f\colon X/\mathcal{R} \to Z$ une application. Comparer les propriétés "$f$ est continue" et "$f \circ \pi$ est continue".
5. Comparer les propriétés "$X$ est séparé" et "$X/\mathcal{R}$ est séparé".

**Exercice 1.2** (Topologie quotient et séparation)**.**
Soient $X$ un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$ et $Y = X/\mathcal{R}$ muni de la topologie quotient. On notera $\pi\colon X \to Y$ l'application quotient.

1. Montrer que si $Y$ est séparé, alors $\mathcal{R}$, vue comme une partie de $X \times X$, est fermée.
2. Montrer que si $\pi$ est ouverte, alors la réciproque de la question précédente est vrai.
3. Montrer que si $X$ est compact, on a équivalence entre
   (i) $Y$ est séparé ;

(ii) $\mathcal{R}$ est fermée dans $X \times X$ ;

(iii) $\pi$ est fermée.

**Exercice 1.3** (Tore de dimension $n$)**.**
Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un entier non nul et $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n.$$

On note $\mathbb{T}^n$ (ou encore $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$) l'espace quotient et $\mathbb{S}^1 = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ (identifié à $\mathbb{C}$). Montrer que $\mathbb{T}^n$ est homéomorphe a $(\mathbb{S}^1)^n$.

**Exercice 1.4** (Droites sur le tore)**.**
Soient $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la projection canonique, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et $D_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ une droite de pente $\alpha$.

1. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, alors $\pi(D_0)$ est homéomorphe à un cercle.

2. Montrer que si $\alpha \notin \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, alors $\pi(D)$ est dense dans $\mathbb{T}^2$ et que $\pi|_{D_0}$ est une bijection continue sur son image. Est-ce que $\pi|_{D_0}$ est un homéomorphisme sur son image ?

Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{T}^2$ définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe une droite $D \subseteq \mathbb{R}^2$ de pente $\alpha$ telle que $x, y \in \pi(D)$.

3. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{T}^2$ et que l'espace quotient est séparé si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

4. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, alors $\mathbb{T}^2/\mathcal{R}$ est homéomorphe à un cercle.

5. Montrer que si $\alpha \notin \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, alors la topologie quotient sur $\mathbb{T}^2/\mathcal{R}$ est grossière.

**Exercice 1.5** (Relation d'équivalence engendrée)**.**
Soient $X$ un ensemble et $\mathcal{R}_0 \subseteq X \times X$ une relation sur $X$ (i.e. une partie de $X \times X$).

1. Montrer que l'intersection (vue comme partie de $X \times X$) des relations d'équivalences contenant $\mathcal{R}_0$ est une relation d'équivalence. On l'appelle la **relation d'équivalence engendrée par** $\mathcal{R}_0$ et on la note $\mathcal{R}$ dans la suite.

2. Montrer que pour tout $x, y \in X$, on a $x\mathcal{R}y$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et une suite $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ d'éléments de $X$ tels que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots n\}$, $x_{i-1}\mathcal{R}_0 x_i$ ou $x_i \mathcal{R}_0 x_{i-1}$ ou $x_{i-1} = x_i$.

**Exercice 1.6** (Écrasement)**.**
Soient $X$ un espace topologique et $A$ une partie de $X$. L'**écrasement** de $A$ dans $X$ est l'espace quotient $X/\{A\} = X/\mathcal{R}$, ou $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendré par $a\mathcal{R}a'$ pour tout $a, a' \in A$. On note $\pi\colon X \to X/\{A\}$ la projection canonique.

1. Montrer que si $A$ est ouverte ou fermée, $\pi|_{X\setminus A}$ est un homéomorphisme sur son image.

Voici quelques exemples.

2. Montrer que l'écrasement de $A = \{0, 1\}$ dans $X = [0, 1]$ est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$.

3. Montrer que l'écrasement du cercle $\mathbb{S}^1$ dans le disque $\mathbb{D}^2$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$.

**Exercice 1.7** (Recollement)**.**
Soient $X$ est $Y$ deux espaces topologiques, $A \subseteq X$ une partie de $X$ et $f\colon A \to Y$ une application continue. Le **recollement** de $X$ sur $Y$ par $f$ est l'espace quotient $X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $a\mathcal{R}f(a)$ pour tout $a \in A$. On notera $\pi\colon X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ la projection canonique.

1. Montrer que si $A$ est fermée alors $\pi|_Y\colon Y \to X \cup_f Y$ est un homéomorphisme sur son image et que cette image est fermée dans $X \cup_f Y$. Que se passe-t-il si $A$ est ouverte ?

2. Montrer que si $X$ et $Y$ sont connexes (resp. connexe par arcs) alors $X \cup_f Y$ aussi.

3. Soient $\varphi_X : X \to Z$ et $\varphi_Y : Y \to Z$ deux applications continues vers un espace topologique $Z$ telles que pour tout $a \in A$, $\varphi_X(a) = \varphi_Y(f(a))$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\varphi \colon X \cup_f Y \to Z$ tels que $\varphi \circ \pi|_X = \varphi_X$ et $\varphi \circ \pi|_Y = \varphi_Y$.

Voici quelques exemples.

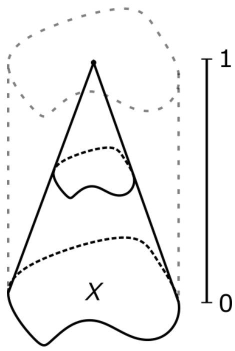
4. Soient $X = Y = [0,1]$, $A = \{0,1\}$ et $f \colon A \to Y$ l'inclusion. Montrer que $X \cup_f Y$ est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$.

5. Donner une construction similaire pour obtenir la sphère $\mathbb{S}^2$.

6. Montrer que si $Y$ est réduit à un point, alors $X \cup_f Y$ est homéomorphe à un écrasement de $A$ dans $X$.

**Remarque 1.8.**
Lorsque $A$ est un point, on parle alors de **bouquet** de $X$ et $Y$.

**Exercice 1.9** (Cône d'un espace).
Soit $X$ un espace topologique. Le **cône** sur $X$ est l'espace quotient $CX = (X \times [0,1])/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x,1)\mathcal{R}(x',1)$ pour tout $x, x' \in X$.



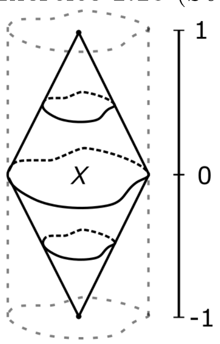

1. Montrer que le cône sur $X$ peut être vu comme un écrasement.

2. Montrer que le cône sur $X = \{0,1\}$ est homéomorphe au segment $[0,1]$.

3. Montrer que le cône sur le cercle $\mathbb{S}^1$ est homéomorphe au disque $\mathbb{D}^2$.

4. Monter que le cône sur la sphère $\mathbb{S}^2$ est homéomorphe à la boule $\mathbb{B}^3$.

**Exercice 1.10** (Suspension).




Soit $X$ un espace topologique. La **suspension** de $X$ est l'espace quotient $SX = (X \times [-1,1])/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x,1)\mathcal{R}(x',1)$ et $(x,-1)\mathcal{R}(x',-1)$ pour tout $x, x' \in X$.

1. Montrer que $SX$ est homéomorphe à un écrasement dans le cône sur $X$.

2. Montrer que $SX$ est homéomorphe au recollement de deux cônes sur $X$.

3. Quel est la suspension du cercle $\mathbb{S}^1$ ?

# 2 Homotopies et équivalence d'homotopie

**Exercice 2.1.**
Expliciter une homotopie entre les chemins $\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ définis pour tout $t \in [0,1]$ par
$$\gamma_1(t) = e^{i\pi t} \qquad \text{et} \qquad \gamma_2(t) = e^{-i\pi t}$$
(on a ici identifié $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$).

**Exercice 2.2.**
Donner, en le justifiant, plein d'exemples différents de deux espaces qui ont le même type d'homotopie mais qui ne sont pas homéomorphes.

**Exercice 2.3.**
Soient $n \geq 1$, $Y$ une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ et $X$ un espace topologique.

1. Soient $f \colon X \to Y$ et $g \colon X \to Y$ deux applications continues de $X$ dans $Y$. Montrer que $f$ et $g$ sont homotopes.

2. En déduire que toute partie convexe de $\mathbb{R}^n$ est contractile.

**Exercice 2.4.**
Soit $Y$ un espace topologique connexe par arcs.

1. Montrer que l'ensemble $[[0,1], Y]$ des classes d'homotopie d'application continue est un singleton.
2. Plus généralement, montrer que si $X$ est un espace topologique contractile, alors $[X, Y]$ est un singleton.

**Exercice 2.5** (Rétraction par déformation)**.**
Soient $X$ un espace topologique, $A \subset X$ une partie de $X$ et $i\colon A \to X$ l'inclusion. On dit que $A$ est un **rétracte par déformation** de $X$ s'il existe une application continue $r\colon X \to A$ telle que $r \circ i = \mathrm{id}_A$ (i.e. $r(a) = a$ pour tout $a \in A$) et que $i \circ r$ est homotope à $\mathrm{id}_X$.

1. Montrer que si $A$ est un rétracte par déformation de $X$ alors $A$ et $X$ ont le même type d'homotopie.
2. Montrer que si $X$ est contractile, il existe $x_0 \in X$ tel que $\{x_0\}$ est un rétracte par déformation de $X$.
3. Montrer que si $X$ et $Y$ sont deux espaces topologiques avec $Y$ contractile. alors $X \times \{y\}$ est un rétracte par déformation de $X \times Y$ pour tout $y \in Y$.

**Exercice 2.6.**
Soit $n \geq 1$ . Montrer que $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ est un rétracte par déformation de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

**Exercice 2.7** (Simplement connexité)**.**
Soient $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$ le cercle et $\mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ le disque dans $\mathbb{R}^2$. On dit qu'un espace $X$ est **simplement connexe** si pour tout application continue $f\colon \mathbb{S}^1 \to X$ du cercle dans $X$ il existe $g\colon \mathbb{D}^2 \to X$ tel que $g|_{\mathbb{S}^1} = f$.

1. Montrer qu'un espace $X$ est simplement connexe si et seulement si toute application continue $f\colon \mathbb{S}^1 \to X$ est homotope à une application constante.
2. Montrer que pour si $X$ est contractile, alors $X$ est simplement connexe.
3. Montrer que la sphère $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$ est simplement connexe. On pourra utiliser la compacité $\mathbb{S}^1$ et le fait que $\mathbb{S}^2$ privé d'un point est homéomorphe à $\mathbb{D}^2$.

**Exercice 2.8** (La sphère de dimension infinie)**.**
Soit $\mathbb{R}^\infty$ l'ensemble des suites réelles à support fini. C'est un espace vectoriel normé par la norme $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n\geq 0} u_n}$. Soit $\mathbb{S}^\infty = \{u \in \mathbb{R}^\infty \mid \|u\|_2 = 1\}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^\infty \setminus \{0\}$ et $\mathbb{S}^\infty$ ont le même type d'homotopie.

Soit $T\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ l'application qui envoie une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $v = T(u)$ donnée par $v_0 = 0$ et $v_n = u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

2. Montrer $T(\mathbb{R}^\infty \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^\infty \setminus \{0\}$.
3. Montrer que $T|_{\mathbb{R}^\infty\setminus\{0\}}\colon \mathbb{R}^\infty \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^\infty \setminus \{0\}$ est homotope à $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^\infty\setminus\{0\}}$.

Soit $f\colon \mathbb{R}^\infty \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^\infty \setminus \{0\}$ qui envoie tout sur la suite $(1, 0, 0 \dots)$.

4. Montrer que $T|_{\mathbb{R}^\infty\setminus\{0\}}\colon \mathbb{R}^\infty \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^\infty \setminus \{0\}$ et $f$ sont homotope.
5. En conclure que $\mathbb{S}^\infty$ est contractile.

# 3 Le langage des catégories

## 3.1 Catégories

Pour $\mathcal{C}$ une catégorie, on notera $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ la classe de ses objets, $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ la classe de ses morphismes et, pour $x, x' \in \mathrm{Ob}(C)$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x')$ la classe des morphismes de $x$ vers $x'$.

**Exercice 3.1** (Épimorphisme).
Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. On dit qu'un morphisme $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$ est un **épimorphisme** si pour tout $z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $g, g' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, z)$, $g \circ f = g' \circ f$ implique $g = g'$.

1. Montrer que la composée de deux épimorphismes est un épimorphisme
2. Montrer qu'un morphisme dans la catégorie **Ens** des ensembles est un épimorphisme si et seulement s'il est surjectif.
3. Dans la catégorie **Ann** des anneaux unitaires montrer que l'unique morphisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est un épimorphisme.

**Exercice 3.2** (Monomorphisme).
Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. On dit qu'un morphisme $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$ est un **monomorphisme** si pour tout $w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $f, f' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(w, x)$, $g \circ f = g \circ f'$ implique $f = f'$.

1. Montrer que la composée de deux monomorphisme est un monomorphisme.
2. Montrer qu'un morphisme dans la catégorie **Ens** des ensembles est un monomorphisme si et seulement s'il est injectif.
3. Est-ce que pour toute sous-catégorie de la catégorie des ensembles, un monomorphisme est injectif ?

**Exercice 3.3** (Isomorphisme).
Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. On dit qu'un morphisme $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$ est un **isomorphisme** s'il existe $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x)$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_y$ et $g \circ f = \mathrm{id}_x$.

1. Montrer que dans la catégorie **Ens** des ensembles un morphisme est un isomorphisme si et seulement si c'est une bijection.
2. Quels sont les isomorphismes dans la catégorie **Top** des espaces topologiques.
3. Montrer qu'un isomorphisme est un monomorphisme et un épimorphisme.
4. Est-ce qu'un morphisme qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme ? (on pourra regarder dans **Top** ou dans **Ann**).
5. Montrer que l'ensemble des isomorphismes (lorsque c'est un ensemble) d'un objet vers lui-même forme un groupe pour la composition.

**Exercice 3.4** (Objet initial).
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit qu'un objet $x_0$ de $\mathcal{C}$ est **initial** si pour tout autre objet $y$ il existe un unique morphisme de $x_0$ vers $y$.

1. Montrer que si $\mathcal{C}$ a un objet initial, il est unique à isomorphisme prêt.
2. Quel est l'objet initial de la catégorie **Ens** des ensemble.
3. Quel est l'objet initial de la catégorie **Grp** des groupes ?
4. quel est l'objet initial de la catégorie **Ann** des anneaux unitaires ?
5. Montrer que la propriété universelle de l'anneau de polynômes $A[X]$ consiste à voir $A[X]$ comme un objet initial dans une catégorie bien choisie.
6. Qu'est-ce qu'un objet initial dans un ensemble ordonné vue comme une catégorie.

**Exercice 3.5** (Objet terminal).
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit qu'un objet $x_0$ de $\mathcal{C}$ est **terminal** si pour tout autre objet $y$ il existe un unique morphisme de $y$ vers $x_0$.

1. Montrer que si $\mathcal{C}$ a un objet terminal, il est unique à isomorphisme prêt.
2. Quel sont les objets terminaux de la catégorie **Ens** des ensembles.
3. Quel est l'objet terminal de la catégorie **Grp** des groupes ?
4. quel est l'objet terminal de la catégorie **Ann** des anneaux unitaires ?
5. Qu'est-ce qu'un objet terminal dans un ensemble ordonné vue comme une catégorie.

**Exercice 3.6.**
Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$.

1. Montrer que s'il existe $g, g' \in Mor_{\mathcal{C}}(y, x)$ tels que $g \circ f = \mathrm{id}_x$ et $f \circ g' = \mathrm{id}_y$ alors $f$ est un isomorphisme.
2. Montrer qu'un morphisme ne peux avoir plus d'un inverse.

**Exercice 3.7.**
Soit **Ord** la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnées et les morphismes les applications croissantes.

1. Quels sont les monomorphismes et les épimorphismes dans cette catégorie.
2. En considérant deux relation d'ordre différente sur un l'ensemble $\{1, 2\}$ construire un morphisme dans **Ord** qui est un épimorphisme et un monomorphisme mais qui n'est pas un isomorphisme.

**Exercice 3.8.**
Montrer qu'un ensemble ordonné peut être vu comme une catégorie. Qu'en est-il d'un ensemble muni d'une relation d'équivalence ?

**Exercice 3.9.**
Montrer qu'un groupe (ou même un monoïde) définie une petite catégorie avec un seul objet.

**Exercice 3.10** (Groupoïdes).
On appelle **groupoïde** une petite catégorie $\mathcal{G}$ dont tous les morphismes sont des isomorphismes.

1. Montrer que dans un groupoïde $\mathcal{G}$, pour tout $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{G}}(x, x)$ est un groupe pour la composition.
2. Montrer que dans un groupoïde $\mathcal{G}$, pour tout $x, y \in \mathcal{G}$, si $\mathrm{Mor}_{\mathcal{G}}(x, y) \neq \emptyset$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{G}}(x, x)$ et $\mathrm{Mor}_{\mathcal{G}}(y, y)$ sont deux groupes isomorphes.
3. Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Montrer que l'ensemble des isomorphismes de $\mathcal{C}$ forme un groupoïde.

**Exercice 3.11** (Catégorie opposée).
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

1. Montrer qu'on peut construire une catégorie $\mathcal{C}^{\mathbf{op}}$ ayant les même objets que $\mathcal{C}$ mais où, pour $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathbf{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, on a $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathbf{op}}}(x, y) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x)$. On appelle cette catégorie, la **catégorie opposée** de $\mathcal{C}$.
2. Qu'est-ce que $(\mathcal{C}^{\mathbf{op}})^{\mathbf{op}}$ ?
3. Montrer qu'un monomorphisme de $\mathcal{C}$ est un épimorphisme de $\mathcal{C}^{\mathbf{op}}$ et vis et versa.
4. Montrer qu'un isomorphisme de $\mathcal{C}$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}^{\mathbf{op}}$.
5. Montrer qu'un objet initial de $\mathcal{C}$ est un objet terminal de $\mathcal{C}^{\mathbf{op}}$ et vis et versa.

**Exercice 3.12** (Catégorie des matrices).
Soit $R$ un anneaux commutatif unitaire. Construire une catégorie $\mathbf{Mat}_R$ dont les objets sont les entiers naturels et dont les morphismes entre deux entiers $m$ et $n$ sont les matrices de taille $n \times m$.

## 3.2 Foncteurs

**Exercice 3.13.**
Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux catégories et $F\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ un foncteurs entre celles-ci.

1. Montrer qu'un foncteur envoi un isomorphisme sur un isomorphisme.

**Exercice 3.14.**
Soit $G$ et $H$ deux groupes vue comme des catégories avec un seul objet. Qu'est qu'un foncteur entre $G$ et $H$ ?

**Exercice 3.15.**

1. Montrer que la construction de cône sur un espace donnée à l'exercice 1.9 induit un foncteur de la catégorie des espaces topologiques sur elle même.
2. Faire de même pour la suspension donnée à l'exercice 1.10.
3. Comment peut on voir l'écrasement, défini à l'exercice 1.6 comme un foncteur ?
4. De même pour le recollement donné à l'exercice 1.7.

**Exercice 3.16.**
Montrer que l'application qui envoie un ensemble $X$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de ses parties définie un foncteur de la catégorie $\mathbf{Ens}^{\mathbf{op}}$ vers $\mathbf{Ens}$.

**Exercice 3.17.**
Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $x_0 \in \mathcal{C}$. Montrer que l'application qui à un objet $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ associe $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x_0, x)$ définie une foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathbf{Ens}$. Qu'en est-il de l'application qui envoie $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ vers $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x_0)$ ?

**Exercice 3.18** (Espace des lacets libres)**.**
Soit $\mathbf{Top}_*$ la catégorie des espaces topologiques pointés, i.e. la catégorie dont les objets sont les paires $(X, x_0)$, avec $X$ un espace topologique et $x_0$ un point de $X$, et où les morphismes entre deux paires $(X, x_0)$ et $(Y, y_0)$ sont les applications continues qui envoient $x_0$ sur $y_0$.
Pour $X$ un espace topologique, on considère $L(X, x_0)$ l'ensemble des applications continues $\gamma\colon [0,1] \to X$ telles que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Montrer que cette construction définie un foncteur de $\mathbf{Top}_*$ vers $\mathbf{Top}$.

**Exercice 3.19.**
Soient $k$ un corps et $\mathbf{vect}_k$ la catégorie des espaces vectoriels de dimension fini sur $k$. Comment pourrait-on modifier cette catégorie pour construire un foncteur vers la catégorie $\mathbf{Mat}_k$ qui envoie un espace vectoriel sur sa dimension ?

**Exercice 3.20** (Monoïde commutatif libre)**.**
Soient $\mathbf{Ens}$ la catégorie des ensembles et $\mathbf{Mon}$ la catégorie des Monoïdes. Pour $X$ un ensemble, on note $\mathbb{N}X$ l'ensemble des applications $f$ de $X$ dans $\mathbb{N}$ à support fini ($f$ est nul en dehors d'un ensemble fini).

1. Montrer que la structure de monoïde commutatif sur $\mathbb{N}$ induit une structure de monoïde commutatif sur $\mathbb{N}X$. On l'appelle le **monoïde commutatif libre sur** $X$.
2. Montrer que cette construction définie un foncteur de $\mathbf{Ens}$ vers $\mathbf{Mon}$.

**Exercice 3.21** (Groupe commutatif libre)**.**
Soient $\mathbf{Ens}$ la catégorie des ensembles et $\mathbf{Grp}$ la catégorie des Groupes. Pour $X$ un ensemble, on note $\mathbb{Z}X$ l'ensemble des applications $f$ de $X$ dans $\mathbb{Z}$ à support fini ($f$ est nul en dehors d'un ensemble fini).

1. Montrer que la structure de groupe abélien sur $\mathbb{Z}$ induit une structure de groupe abélien sur $\mathbb{Z}X$. On l'appelle le **groupe abélien libre sur** $X$.
2. Montrer que cette construction définie un foncteur de $\mathbf{Ens}$ vers $\mathbf{Grp}$.

**Exercice 3.22.**
Soient **SemiGrp** la catégorie des semi-groupes (i.e. des ensembles muni d'une loi de composition associative) et **Mon** la catégorie des monoïdes. Pour $(M, \times)$ un semi-groupe, on considère $M_e = M$ si $M$ a un élément neutre et $M_e = M \cup \{e\}$, où $e$ est un élément neutre pour $\times$, sinon. Montrer que cette construction définie un foncteur de la catégorie de **SemiGrp** vers **Mon**.

**Exercice 3.23.**
Montrer qu'une action d'un groupe $G$ sur un ensemble $X$ définie une foncteur de $G$, vu comme une catégorie avec un seul objet, vers la catégorie **Ens** des ensembles.

**Exercice 3.24.**
Un foncteur $F\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ entre deux catégories est un isomorphisme s'il existe une foncteur $G\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ tel que $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}$ et $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}$.

1. Montrer qu'un groupoïde $\mathcal{G}$ est isomorphe à sont opposé $\mathcal{G}^{\mathbf{op}}$.
2. Pour $R$ un anneau commutatif unitaire, Construire un isomorphisme de $\mathbf{Mat}_R$ vers $\mathbf{Mat}_R^{\mathbf{op}}$.

# 4 Groupe fondamental

## 4.1 Chemins, homotopies relatives et groupe fondamental

**Exercice 4.1.**
Soit $X$ un espace topologique connexe par arcs.

1. Montrer que pour tout $x_0, x_1 \in X$, $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.
2. Donner un contre exemple dans le cas où $X$ n'est pas connexe par arcs.
3. Donner un contre exemple dans le cas où $X$ n'est pas connexe par arcs mais connexe.

**Exercice 4.2.**
Soient $X$ un espace topologique $x_0 \in X$ et $X_0$ la composante connexe par arc de $X$ contenant $x_0$. Montrer que $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe à $\pi_1(X_0, x_0)$.

**Exercice 4.3.**
Soit $X$ un espace topologique connexe par arcs. Monter que les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) $X$ est simplement connexe (voir exercice 2.7 pour la définition).

(ii) Il existe $x_0 \in X$ tel que $\pi_1(X, x_0)$ est trivial.

(iii) Pour tout $x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0)$ est trivial.

**Exercice 4.4** (Lacets et applications du cercle)**.**
Soient $X$ un espace topologique connexe par arcs et $x_0 \in X$.
Montrer que $\pi_1(X, x_0)$ est en bijection avec $[\mathbb{S}^1, X]$.

**Exercice 4.5.**
Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$.
Montrer que $\pi_1\left(X \times Y, (x_0, y_0)\right)$ est isomorphe à $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

## 4.2 Fonctorialité et équivalences d'homotopie

**Exercice 4.6.**
Soient $X$ un espace topologique, $A \subseteq X$ une partie de $X$ et $x_0 \in A$. Soit $r\colon X \to A$ une application telle que $r\,|_A = \mathrm{id}_A$.

1. Montrer que l'inclusion $i$ de $A$ dans $X$ induit un morphisme injectif $i_*\colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.
2. Monter que si $r$ est une rétraction par déformation, alors $i_*$ est un isomorphisme.

**Exercice 4.7** (Groupoïde fondamental).
Soit $X$ un espace connexe par arcs. Le **groupoïde fondamental** de $X$ est la catégorie $\Pi_1(X)$ dont les objets sont les points de $X$ et dont les morphismes entre deux points $x, y \in X$ sont les classes d'homotopies strictes de chemin de $x$ à $y$ dans $X$.

1. Montrer que $\Pi_1(X)$ est un groupoïde.
2. Pour $x \in X$, quel est le groupes $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(x, x)$ ?
3. Montrer que cette construction définie un foncteur de la catégorie **Top** des espaces topologiques vers la catégorie **Cat** des petites catégories.

**Exercice 4.8** (Un pas vers Van Kampen).
Soient $X$ un espace topologique.
On suppose qu'il existe deux ouverts $U$ et $V$ de $X$ tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V$ est connexe par arcs et on note $u\colon U \to X$ et $v\colon V \to X$ les injections canoniques. Soit $x_0 \in U \cap V$

1. Montrer que $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par $u_*(\pi_1(U))$ et $v_*(\pi_1(V))$.
2. Application : montrer que pour tout $n \geq 2$, le groupe fondamental de $\mathbb{S}^n$ est trivial.

**Exercice 4.9.**
Soient $X$ un espace topologique, $x_0 \in X$ et $A$ une partie de $X$ contenant $x_0$. On note $i\colon A \to X$ l'inclusion canonique et $i_*\colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ l'application induite en homotopie.

1. Est-ce que $i_*$ est injective ?
2. On suppose $A$ connexe par arcs. Montrer que $i_*$ est surjective si et seulement si tout chemin ayant ses extrémités dans $A$ est homotope à un chemin entièrement dans $A$.

**Exercice 4.10.**
Soient $X$ un espace topologique, $x_0 \in X$ et $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to X$ une application continue du cercle dans $X$ telle que $\alpha(1) = x_0$ (on identifie ici $\mathbb{S}^1$ à l'ensemble des nombres complexes de module 1).
En utilisant la fonctorialité, montrer que $\alpha$ est trivial dans $\pi_1(X, x_0)$ si et seulement si $\alpha$ s'étend continuement en une application continue du disque $\mathbb{D}^2$ dans $X$.

## 4.3 le groupe fondamental du cercle et applications

**Exercice 4.11** (Théorème du point fixe de Brouwer).

1. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $r\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ telle que $r|_{\mathbb{S}^1} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$. on pourra raisonner par l'absurde et essayer de construire une rétraction $r\colon DD^2 \to \mathbb{S}^1$ en considérant pour $x \in \mathbb{D}^2$ l'intersection du cercle et de la droite passant par $x$ et $f(x)$.
2. En déduire que toute application continue $f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ admet un point fixe.

**Exercice 4.12.**
Montrer que $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ pour tout $n \geq 3$.

**Exercice 4.13** (Borsuk-Ulam).
Soit $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application continue de la sphère de dimension 2 vers le plan.
Montrer qu'il existe deux points antipodaux $x$ et $-x$ sur la sphère tels que $f(x) = f(-x)$. On pourra raisonner par l'absurde, considérer l'application $g\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ définie par $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$ et essayer de montrer que l'image de l'équateur est non trivial dans le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$.

**Exercice 4.14** (D'Alembert Gauss). Montrer que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine.

# 5 Theoreme de Van Kampen

## 5.1 Groupe libre et produit libre

**Exercice 5.1** (Monoïde libre).
Soit $X$ un ensemble. On note $\mathbb{W}(X)$ l'ensemble des mots sur $X$.

1. Montrer que $X$ muni de la concaténation forme un monoïde. Quel est l'élément neutre ?
2. Montrer que cette construction définie un foncteur de **Ens** vers **Mon**.

**Exercice 5.2** (Propriétés universelle du groupe libre).
Soient $X$ un ensemble, $G$ un groupe et $f\colon X \to G$ une application. On notera $i\colon X \to F(X)$ l'inclusion canonique de $X$ dans $F(X)$

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupe $\varphi\colon F(X) \to G$ tels que $f = \varphi \circ i$.
2. Soit $(G_X, i_X)$ un couple avec $G_X$ un groupe et $i_X\colon X \to G_X$ une application tel que pour tout groupe $G$ et tout $f\colon X \to G$, il existe un unique morphisme $\varphi\colon G_X \to G$ tel que $f = \varphi \circ i_x$. Montrer que $G_x$ est isomorphe à $F(X)$.

**Exercice 5.3** (Propriétés du groupe libre).
Soit $X$ un ensemble.

1. Montrer que tout élément de $F(X)$ peut s'ecrire sous la forme $x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ avec $\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$ si $x_i = x_{i+1}$.
2. Montrer que la construction du groupe libre défini un foncteur de **Ens** vers **Grp**.
3. Si $Y$ est un ensemble equipotent à $X$, montrer que $F(X)$ et $F(Y)$ sont isomorphes.

**Exercice 5.4** (Présentation de groupe). Soit $G$ un groupe et $S$ une partie génératrice de $G$.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme $\varphi\colon F(X) \to G$ tel que $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$.

Soit $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$ et soit $R$ une partie génératrice de $N$. le couple $(S, R)$ est appelé une **présentation** de $G$ et on note $G = \langle S \mid r = 0, r \in R\rangle$. Si $S$ et $R$ sont finis, on parlera de **presentation fini** de $G$.

2. Montrer que $\mathbb{Z} = \langle a \mid \emptyset\rangle$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle a \mid a^2 = 1\rangle$.
4. Montrer que $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = abab = 1\rangle$
5. Soit $D_{2n}$ le groupe des isométrie du $n$-gone. Montrer que $D_{2n} = \langle r, s \mid r^2 = s^n = (rs)^2 = 1\rangle$.

**Exercice 5.5.**
Soient $G = \langle S_G \mid R_G\rangle$ et $H = \langle S_H \mid R_H\rangle$ deux groupes donnés par des présentations.
Montrer que $G * H = \langle S_G \cup S_H \mid R_G \cup R_H\rangle$.

**Exercice 5.6** (Propriété universelle du produit libre amalgamé).
Soient $G_1$, $G_2$ et $H$ trois groupes et $i_1\colon H \to G_1$ et $i_2\colon H \to G_2$ deux morphisme de groupe. Notons $j_1\colon G_1 \to G_1 *_H G_2$ et $j_2\colon G_2 \to G_1 *_H G_2$ les applications canoniques.
Montrer que, pour tout triplet $(K, f_1, f_2)$ avec $K$ un groupe, $f_1\colon G_1 \to K$ et $f_2\colon G_2 \to K$ tels que $f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2$, il existe un unique morphisme $f\colon G_1 *_H G_2 \to K$ tel que $f \circ j_1 = f_1$ et $f \circ j_2 = f_2$.

## 5.2 Le théorème

**Exercice 5.7.**
Donner le groupe fondamental du bouquet de $n$ cercle.

**Exercice 5.8.**
Donner le groupe fondamental de $\mathbb{S}^2 \cup ([-1, 1] \times \{0, 0\})$.

**Exercice 5.9.**
Donner des présentation pour les groupes fondamentaux du tore, de la bouteille de Klein et de la surface de Boy.

# 6 Revêtements

## 6.1 definition et exemples

**Exercice 6.1.**
Montrer qu'une application $p\colon E \to B$ est un revêtement si et seulement si pour tout $b \in B$ il existe un voisinage $V$ de $b$ tel que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} U_i$ soit une union disjointe d'ouverts $U_i$ de $E$ tels que $f|_{U_i}\colon U_i \to V$ soit un homéomorphisme.

**Exercice 6.2.**
Soit $G$ un groupe discret agissant proprement discontinuement sur un espace topologique séparé $X$. Montrer que les orbites sont fermées dans $X$ et que $X/G$ est séparé.

**Exercice 6.3.**
Soit $G$ un groupe discret agissant proprement discontinuement sur un espace topologique séparé $X$.

1. Pour tout $x \in X$ il existe un voisinage $V$ de $x$ tel que $gV \cap V = \emptyset$ pour tout $g \in G \setminus \{e\}$.
2. Les orbites de l'action sont discrète.
3. La projection canonique $X \to X/G$ est un revêtement.
4. Montrer que le tore $\mathbb{T}^n$ est un exemple d'espace quotient par un groupe agissant proprement discontinuement.

**Exercice 6.4** (Catégorie des revêtements au dessus d'un espace)**.**
Soit $B$ un espace topologique.

1. Construire une catégorie dont les objets sont les revêtements au dessus de $B$ et les morphismes entre deux revêtement $p_1\colon E_1 \to B$ et $p_2\colon E_2 \to B$ sont les applications continue $f\colon E_1 \to E_2$ telles que $p_2 \circ f = p_1$ . Est-ce que cette catégorie à un objet terminal ?
2. Montrer que si $E$ est connexe, le groupes des automorphisme d'un revêtement $p\colon E \to B$ agit librement sur $E$.

## 6.2 Propriété de relèvement

**Exercice 6.5.** Soit $p\colon E \to B$ un revêtement avec $E$ connexe par arcs. Montrer que pour tout $b \in B$, et tout $x, y \in p^{-1}(\{b\})$, $p_*(\pi_1(E, x))$ et $p_*(\pi_1(E, y))$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b)$.